

KÖZÉPPONTOS NAGYÍTÁS, KICSINYÍTÉS

BEVEZETŐ

Jacques-Louis David klasszicista stílusú francia festő *Laurent Lavoisier és felesége* című festményének egy részletét felnagyítottuk. Az egyre nagyobb arányú nagyítások mindegyikénél olyan kép jön létre, amelyen az eredetileg egyenesnek látszó vonalak továbbra is egyenesnek látszanak, amelyen az eredeti kép távolságainak aránya ugyanakkora marad, amelyen az eredeti képen megmért szögek ugyanakkora szögek maradnak. Egyszóval a formák, az alakok megmaradnak, nem torzulnak a nagyítás során: a kéz kéznek, a papírlap papírlapnak látszik mindegyik nagyításban. A nagyítás során a képen a férfi ujjainak hossza ugyanannyiszorosára nő, mint a papírlap szélessége.

A mai technika világában számítógép segítségével sokszor nagyítjuk, kicsinyítjük a fényképeinket. Kicsinyítjük, ha kisebb méretben szeretnénk beilleszteni egy szövegbe, de fontos számunkra, hogy a teljes fénykép bekerüljön úgy, hogy megtartsuk közben az eredeti fényképen szereplő arányokat. Nagyítjuk, ha egy részletre vagyunk kíváncsiak.



Hogyan lehet nagyítani, kicsinyíteni?

A fotókról optikai úton készülő nagyítások – nagyon leegyszerűsítve – **középpontos nagyítással** készülnek. Ennek lényegét mutatja a mellékelt képsorozat, amely egy kisfiú eredeti képének kétszeresre **nagyított**, valamint felére, illetve negyedére **kicsinyített** változatát mutatja.

Ha az eredeti képen megjelölünk három pontot (A , B , C), akkor láthatjuk, hogy az O középpontú kétszeres nagyításnál: $OA_1 = 2 \cdot OA$, $OB_1 = 2 \cdot OB$, $OC_1 = 2 \cdot OC$. Így van ez az összes többi ponttal is: például a kisfiú orra hegye a nagyított képen kétszer akkora távolságra van az O ponttól, mint az eredetin.

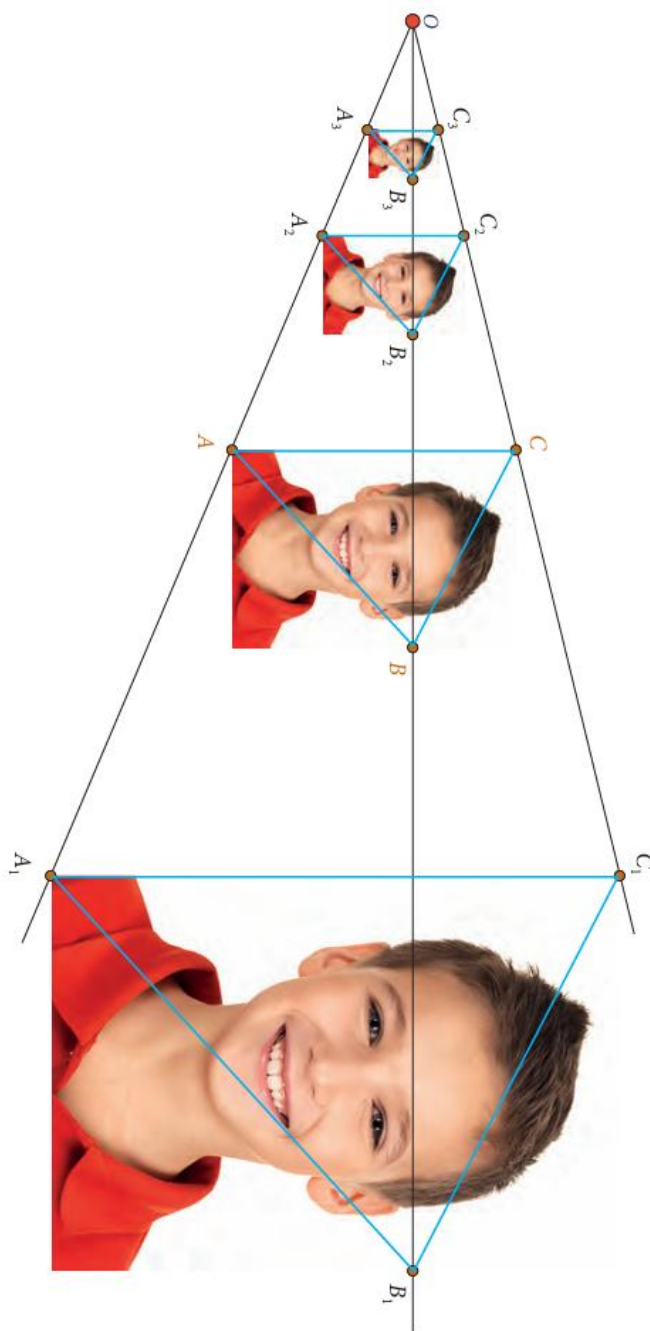
A negyedére kicsinyített kép esetében minden O -tól mért távolság a negyede az eredeti távolságnak, a felére kicsinyített képen pedig ugyanez az arány $1 : 2$.

Az egymásnak megfelelő szakaszok párhuzamosak (például $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$), illetve egy egyenesbe esnek, ha a szakasz egyenese átmegy az O ponton (például OA , OA_1 , OA_2 és OA_3). Ebből az következik, hogy az ABC háromszög szögei ugyanakkorák, mint a másik három háromszög megfelelő szögei. Ez minden más szögre ugyancsak igaz: bármely szögnek a középpontos nagyítás során kapott képe ugyanakkora, mint az eredeti szög.

Azt is könnyen beláthatjuk, hogy a kétszeres nagyításnál minden szakasz kétszer olyan hosszúvá válik, a negyedére kicsinyítésnél minden szakasz negyedakkora lesz, mint az eredeti képen: például $A_1B_1 = 2 \cdot AB$, $A_3C_3 = \frac{1}{4} \cdot AC$.

Érthetővé válik ezek alapján, hogy mit jelent a „forma”, az „alak” megmaradása:

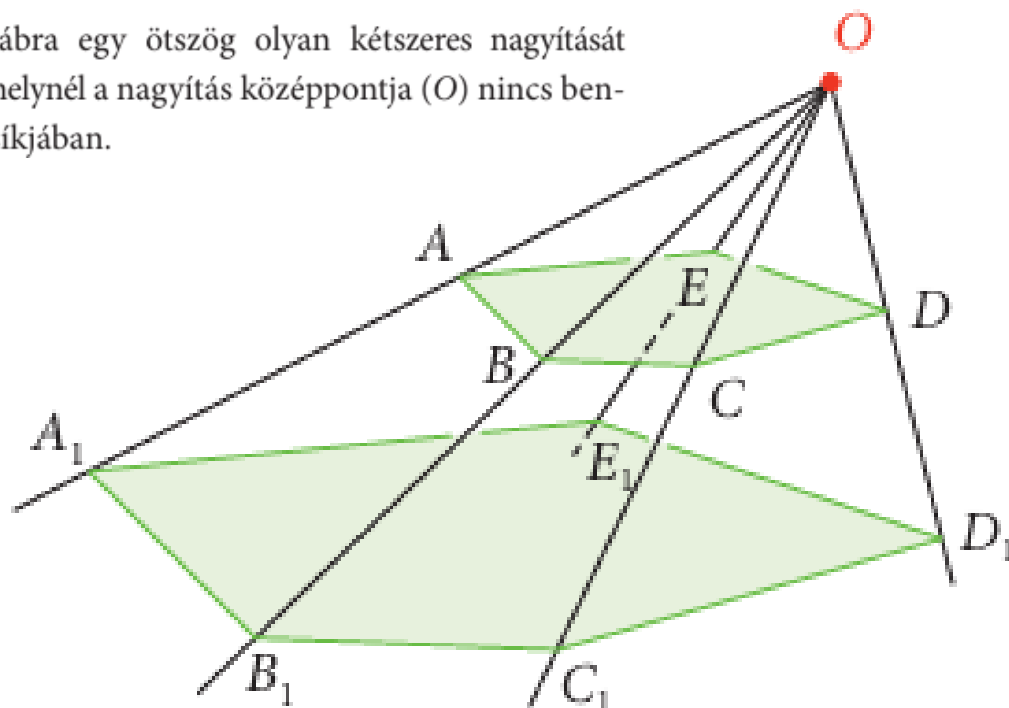
- Az ABC háromszög bármelyik két oldalának arányát nézzük, ez ugyanannyi, mint a nagyított, illetve kicsinyített háromszög megfelelő két oldalának aránya; hiszen ha egy háromszög minden oldalának hosszát például kétszeresére változtatjuk, akkor a háromszögoldalak aránya nem változik meg;
- a kisfiú arcának bármely két részletét hasonlítjuk össze az egyik képen, a megfelelő méretek aránya mindegyik képen ugyanakkora lesz.



Megjegyzés

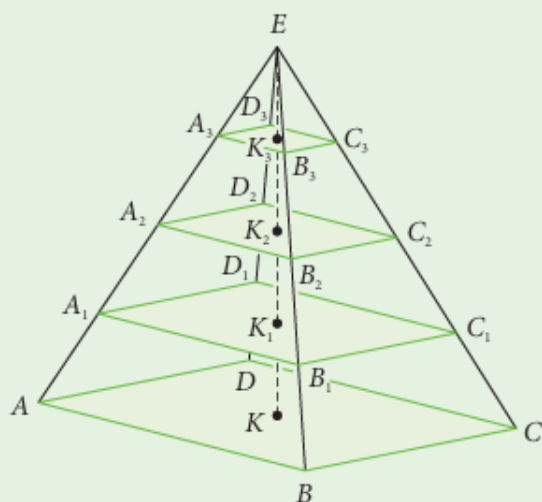
Egy síkbeli alakzat nagyítható a síkjának valamely pontjából, de a síkján kívüli pontból is. A fotók nagyítása általában nem a kép síkjában, hanem térben megvalósuló folyamat.

A mellékelt ábra egy ötszög olyan kétszeres nagyítását szemlélteti, amelynél a nagyítás középpontja (O) nincs benne az ötszög síkjában.



FELADATOK

- 3** Az $ABCDE$ tömör, szabályos négyoldalú gúla alap-
éle 8 cm, magassága 12 cm. A gúlát az alaplapjával
párhuzamos három síkkal négy részre vágjuk úgy,
hogy a szomszédos párhuzamos síkok távolsága
3 cm legyen.



- Milyen testek keletkeztek a részekre vágás során, milyen sokszögek határolják ezeket a testeket?
- Mekkora területűek a szétvágásnál keletkező síkmetszetek (a színezett négyszögek, pl. $A_1B_1C_1D_1$)?
- A síkmetszetek mindegyike átvihető egy másikba középpontos nagyítással. Válassz ki két síkmetszetet, add meg a megfelelő nagyítás középpontját és arányát!

Megoldás:

a)

A vágások során a gúlát négy részre osztottuk felülről lefelé haladva:

- A legfelső test:

Egy kisebb, az eredetihez hasonló szabályos négyoldalú gúla ($A_3B_3C_3D_3E$).

Határoló sokszögek: 1 darab négyzet (alaplap) és 4 darab egyenlő szárú háromszög.

- A többi három alsó test:

Mindegyik egy-egy szabályos négyoldalú csonkagúla.

Határoló sokszögek testenként: 2 darab különböző méretű négyzet és 4 darab egyenlő szárú trapéz (oldallapok).

b)

A gúla teljes magassága: $m = 12$ cm.

A síkok távolsága egymástól: 3 cm.

A síkmetszetek távolsága a gúla E csúcsától:

- $m_3 = 3$ cm
- $m_2 = 3 + 3 = 6$ cm
- $m_1 = 6 + 3 = 9$ cm
- $m = 12$ cm (az alaplap)

A középpontos hasonlóság alapján az oldalak hossza:

$$a_3 = 8 \cdot \frac{3}{12} = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2 \text{ cm}$$

$$a_2 = 8 \cdot \frac{6}{12} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \text{ cm}$$

$$a_1 = 8 \cdot \frac{9}{12} = 8 \cdot \frac{3}{4} = 6 \text{ cm}$$

A síkmetszetek területei (négyzetek):

- Legfelső metszet: $T_3 = 2^2 = 4 \text{ cm}^2$
- Középső metszet: $T_2 = 4^2 = 16 \text{ cm}^2$
- Alsó metszet: $T_1 = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$

c)

Válasszuk az $A_3B_3C_3D_3$ és az $A_1B_1C_1D_1$ metszeteket.

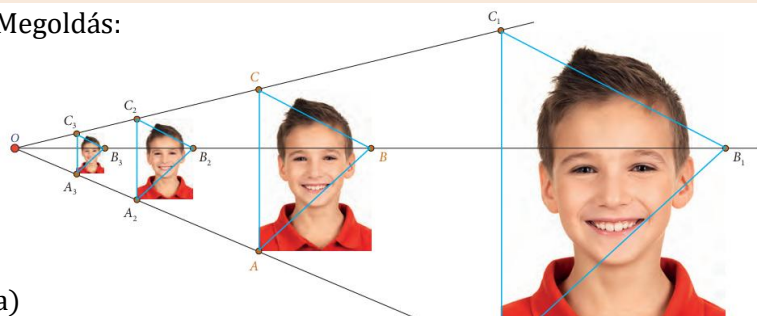
- A nagyítás középpontja: a gúla E csúcsa.
- A nagyítás aránya:

$$\lambda = \frac{a_1}{a_3} = \frac{6 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 3$$

3 A Bevezetőben látható, kisleányról készült képsorozattal kapcsolatosak a következő kérdések:

- a) Hányszoros nagyítása a legnagyobb kép a legkisebbnek?
- b) Mekkora annak az O középpontú kicsinyítésnek az aránya, amelynél az $A_1B_1C_1$ háromszög képe az $A_2B_2C_2$ háromszög?
- c) Hányszor akkora területű a legnagyobb kép, mint a legkisebb?

Megoldás:



a)
A képen látható egyenesek az O középpontból indulnak ki.
Mérjük le vagy olvassuk le a megfelelő szakaszok arányait a hasonlóság alapján.

A legkisebb kép az $A_3B_3C_3$ háromszög, a legnagyobb az $A_1B_1C_1$ háromszög.

A rajz alapján a csúcstól mért távolságok mértani sorozatot vagy egyenletes felosztást követnek:

Az OA_1 szakasz hossza pontosan a négyszerese az OA_3 szakasz hosszának.

Ebből adódóan a legnagyobb kép oldalai négyszer akkora méretűek, mint a legkisebbé.

A nagyítás mértéke:

$\lambda = 4$ -szeres.

b)
A kicsinyítés során az $A_1B_1C_1$ (legnagyobb) háromszöget visszük át az $A_2B_2C_2$ háromszögbe.
Az ábra alapján az OA_2 szakasz hossza fele az OA_1 szakasz hosszának.

A kicsinyítési arány a kapott szakasz és az eredeti szakasz hosszának hányadosa:

$$\lambda = \frac{OA_2}{OA_1} = \frac{1}{2} = 0,5$$

c)
Tudjuk, hogy ha két síkidom hasonló, és a hasonlóság aránya λ , akkor a területeik aránya λ^2 .
Az a) pont alapján a legnagyobb kép a legkisebbnek a $\lambda = 4$ -szeres nagyítása.

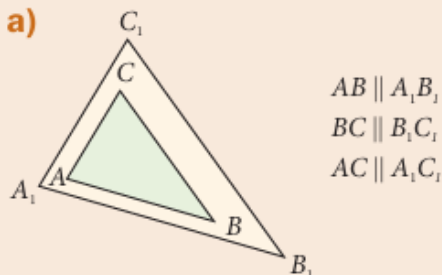
A területek aránya ennek megfelelően:

$$\lambda^2 = 4^2 = 16$$

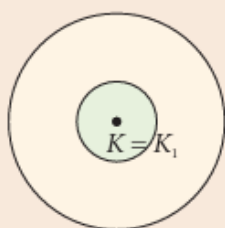
A legnagyobb kép területe a legkisebbnek pontosan 16-szorosa.

4 Fogalmazd meg, hogy az alábbi esetekben hogyan határozható meg szerkesztéssel a nagyítás középpontja!

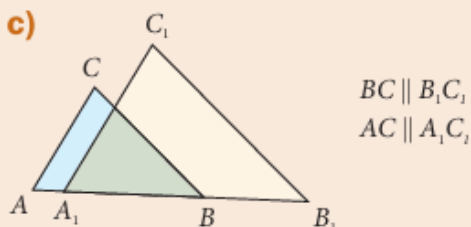
a)



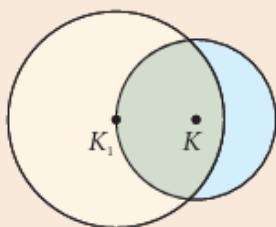
b)



c)



d)



Megoldás:

a)

A középpontos hasonlóság tulajdonsága alapján a megfelelő pontokat összekötő egyenesek egy pontban metszik egymást. Ez a metszéspont lesz a keresett középpont.

• Szerkesztés lépései:

1. Húzzunk egy egyenest az A és az A_1 pontokon keresztül.
2. Húzzunk egy másik egyenest a B és a B_1 pontokon keresztül.
3. A két egyenes (AA_1 és BB_1) metszéspontja adja meg a nagyítás O középpontját.
4. Ellenőrzésképpen a CC_1 egyenesnek is pontosan ezen az O ponton kell áthaladnia.

b)

Az ábrán látható két kör középpontja egybeesik, azaz $K = K_1$.

• Szerkesztés lépései:

Mivel a két kör koncentrikus, a kisebbik kört önmagából kiindulva nagyítottuk fel. A középpontos hasonlóság definíciója alapján a középpont helyben marad.

c)

Az ábra alapján az AB és A_1B_1 oldalak egyetlen közös egyenesen (a háromszögek alapvonalán) fekszenek.

• Szerkesztés lépései:

1. Húzzunk egy egyenest a C és a C_1 pontokon keresztül.
2. Mivel az A, B, A_1, B_1 pontok mind egy egyenesen vannak, a pontpárokat összekötő egyenes maga az alapvonal.

d)

Két kör között kétféle középpontos hasonlóság is létezik (egy külső és egy belső középpont).

Mivel az ábrán a két kör nem tartalmazza egymást teljesen, határozzuk meg a külső nagyítási középpontot.

• Szerkesztés lépései:

1. Húzzunk egy egyenest a két kör középpontján, K -n és K_1 -en keresztül (középpontok egyenese).
 2. Vegyünk fel egy tetszőleges sugarat az első körben: húzzunk egy KP szakaszt a K középpontból a kör kerületére.
 3. Szerkesszünk ezzel párhuzamos sugarat a másik körben: a K_1 pontból húzzunk egy K_1P_1 szakaszt, amely párhuzamos és azonos irányú a KP szakasszal, és a K_1 középpontú kör kerületéig tart.
 4. Húzzunk egy egyenest a két kerületi ponton, P -n és P_1 -en keresztül.
 5. A KK_1 egyenes és a PP_1 egyenes metszéspontja adja meg a nagyítás O középpontját.
-